Analyse

Exercice 1 Théorème de Césàro et applications.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

(b) Étudier la réciproque.

2. Lemme de l'escalier.

Montrer que

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

3. On suppose désormais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad \ell > 0.$$

Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exercice 2 Transformation d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n := \sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. Principe de la sommation d'Abel.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

2. Démonstration du théorème d'Abel.

On suppose que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n v_n$ converge.

3. Application.

Soient $\alpha > 0$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

(b) En déduire la nature des séries $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

Exercice 6

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite positive.

1. Est-ce que, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum_n u_n$ converge ?
2. Montrer que

$$\left.\begin{array}{l}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \sum_n u_n \text{ converge}\end{array}\right\} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 20

Existe-t-il $x, y \notin \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$?

Exercice 21

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

Algèbre

Exercice 28

Soit $n \geqslant 2$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ayant n racines réelles distinctes.
Soit $a > 0$. Que dire des racines de $P^2 + a$?

Exercice 30

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tels que P' divise P.

Exercice 36 Noyaux et images itérés, cœur et nilespace.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \text{ et } \mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k).$$
2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.
3. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p) \text{ et } \mathrm{Im}(u^{p+k}) = \mathrm{Im}(u^p)$$
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u^p)$ *et* $\mathrm{Ker}(u^p)$ *s'appellent respectivement « cœur » et « nilespace » de* u.

Exercice 40 Matrices de rang 1.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ telles que $A = CL$.
2. Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
3. Déterminer, pour $p \in \mathbb{N}$, une expression de A^p.

Exercice 42

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice *nilpotente*.

> *La matrice N est dite* nilpotente *lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.*

Montrer que $N - \mathrm{I}_n$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 43 Lemme de Hadamard.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

> *Une matrice* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *est dite* à diagonale strictement dominante *lorsque*
>
> $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Exercice 55 Inversibilité dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que $M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 59

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & (0) \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & 2 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 69 Similitudes d'un espace euclidien.

Soient $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{L}(E)$.

> - *On dit que* f *est une* similitude de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *lorsque*
>
> $$\forall x \in E, \quad \big\|f(x)\big\| = \lambda \|x\|.$$
>
> - *On dit que* f préserve l'orthogonalité *lorsque*
>
> $$\forall x, y \in E, \quad x \perp y \implies f(x) \perp f(y).$$

1. Soient $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. Montrer que $x - y \perp x + y$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$f \text{ est une similitude de rapport } \lambda \iff \forall x, y \in E, \ \big\langle f(x) \,\big|\, f(y) \big\rangle = \lambda^2 \langle x \mid y \rangle.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On suppose que f est une similitude de rapport λ.
   Montrer que f préserve l'orthogonalité.
4. On suppose que f préserve l'orthogonalité.
   Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   (a) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\big\|f(e_i)\big\| = \big\|f(e_j)\big\|$.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que f est une similitude de rapport λ.

Exercice 75

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \langle A \mid P \rangle$?

Exercice 80 Suites de carré sommable.

On considère

$$\ell^2 := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_n |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

On définit sur $\ell^2 \times \ell^2$ l'application suivante :

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\left(\ell^2, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ est un espace préhilbertien réel.

2. On considère

$$F := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \geqslant p, \;\; u_n = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2, différent de ℓ^2.

(b) Montrer que $F \neq \left(F^\perp\right)^\perp$.

Probabilités

Exercice 84

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathscr{B}(p_n).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Exercice 85

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Montrer que

$$\mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2].$$

Exercice 89

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$
2. **Application.**
On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $1/6$ d'au plus $1/100$.