Jérémy BETTINGER et William GREGORY

Correction des exercices

ANALYSE

Exercice 1 Théorème de Césàro et applications.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

(b) Étudier la réciproque.

2. Lemme de l'escalier.

Montrer que

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

3. On suppose désormais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad \ell > 0.$$

Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Correction • Exercice 1.

1. (a) ▶ On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

▶ Soit $\varepsilon > 0$.

▶ Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, fixons $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

▶ Soit $n \geqslant N_\varepsilon$.

▶ On a

$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right|,$$

d'où, par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon-1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{n}|u_k - \ell|.$$

▶ Étudions chacune des deux sommes.

▷ Comme $\sum_{k=1}^{N_\varepsilon-1}|u_k - \ell|$ est une quantité finie indépendante de n,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon-1}|u_k - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par définition de la convergence, fixons $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N'_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon-1}|u_k - \ell|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

▷ Puisque pour $k \geqslant N_\varepsilon$, on a $|u_k - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{n}|u_k-\ell| \leqslant \frac{1}{n}\underbrace{(n-N_\varepsilon+1)}_{\leqslant n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

▶ Posons $N := \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$. On a alors

$$\forall n \geqslant N, \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

▶ Par définition de la convergence, on a bien obtenu la convergence souhaitée.

(b) ▶ On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n := (-1)^n$.

▶ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas car elle admet deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

▶ La « suite des moyennes de Césàro » converge.

▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} {}^{-1}/_{n} & \text{si} \quad n \equiv 1 \ [2] \\ 0 & \text{si} \quad n \equiv 0 \ [2] \end{cases}.$$

▷ Donc $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

▶ La réciproque est donc fausse.

2. ▶ On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

▶ On applique **1.(a)** à la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

▶ Or, par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_1$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}$ donc

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

3. ▶ On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

▶ Par stricte positivité de u_n pour $n \in \mathbb{N}$ et de ℓ, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et $\ln(\ell)$ est bien défini.

▶ Par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$.

▶ On applique **1.(a)** à la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell).$$

▶ Or, par propriétés du logarithme,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k) = \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{1/n}\right) = \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k}\right).$$

▶ On a donc

$$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell),$$

d'où, par continuité de exp sur $\mathbb{R}$,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exercice 2 Transformation d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n := \sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. Principe de la sommation d'Abel.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

2. Démonstration du théorème d'Abel.

On suppose que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n v_n$ converge.

3. Application.

Soient $\alpha > 0$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

(b) En déduire la nature des séries $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

Correction • Exercice 2.

1. ▶ Remarquons que la suite $(v_n)_n$ est définie par

$$\begin{cases} v_0 = V_0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad v_k = V_k - V_{k-1}. \end{cases}$$

▶ On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k &= \varepsilon_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) \\ &= \varepsilon_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_{k-1}, \end{aligned}$$

d'où, par changement d'indice dans la deuxième somme,

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} V_k = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k V_k + \varepsilon_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} V_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n. \end{aligned}$$

▶ $\boxed{\text{D'où l'égalité souhaitée.}}$

2. ▶ On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k$. On souhaite montrer que $(S_n)_n$ converge.

▶ Par transformation d'Abel, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

▶ Le premier terme de la somme converge.

▷ La suite $(V_n)_n$ étant bornée, fixons $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|V_n| \leqslant M$.

▷ Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k\right| \leqslant (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) M.$$

▷ En effet, $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \geqslant 0$ par décroissance de $(\varepsilon_n)_n$.

▷ Or la suite $(\varepsilon_n)_n$ converge donc la série télescopique $\sum (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$ converge.

▷ La série $\sum M(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})$ converge donc, ce qui assure, par comparaison pour les séries à termes positifs, la convergence de $\sum V_n(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})$.

▷ La suite des sommes partielles de cette série est donc convergente donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k\right)_n$ converge.

▶ Le deuxième terme de la somme converge.

▷ La suite $(V_n)_n$ étant bornée, on fixe comme précédemment $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varepsilon_n V_n| \leqslant M \varepsilon_n.$$

▷ Or $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n V_n = 0.$$

▶ Les deux membres de la somme ayant une limite, la suite $(S_n)_n$ converge.

▶ Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum \varepsilon_n v_n \text{ converge.}}$

3. (a) ▶ On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n := \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $v_n := e^{in\theta}$.

▶ Les hypothèses du théorème d'Abel sont vérifiées.

▷ Comme $\alpha > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

▷ La suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante car $\alpha > 0$.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, comme $e^{i\theta} \neq 1$,

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^k = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

d'où, par inégalité triangulaire,

$$|V_n| \leqslant \frac{1 + \left|e^{i\theta}\right|}{|1 - e^{i\theta}|} \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|},$$

ce majorant étant bien défini car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

La suite $(V_n)_{n \geqslant 1}$ est donc bien bornée.

▶ Par application du théorème d'Abel, $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ converge.}}$

(b) ▶ Puisque $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge, notons $\ell := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

▶ Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right) - \mathfrak{Re}(\ell)\right| = \left|\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} - \ell\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} - \ell\right|,$$

d'où, par encadrement,

$$\sum_{n=1}^{N} \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathfrak{Re}(\ell),$$

donc $\sum_{n\geqslant 1} \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right)$ converge.

Le cours de topologie de deuxième année permet d'aller plus vite sur cet argument. La partie réelle est une fonction lipschitzienne de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, donc continue entre ces deux espaces vectoriels normés. La caractérisation séquentielle de la continuité s'applique, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right) &= \lim_{N\to+\infty} \mathfrak{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right) \\
\text{(par continuité de } \mathfrak{Re}(\cdot)) \quad &= \mathfrak{Re}\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right) \\
&= \mathfrak{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right) = \mathfrak{Re}(\ell).
\end{aligned}$$

▶ Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{Re}\left(\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right) = \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \text{ converge.}}$$

▶ Le même raisonnement avec $\mathfrak{Im}$ donne

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha} \text{ converge.}}$$

Exercice 6

Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Correction • Exercice 6.

▶ Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \ln(n^2 - 1) - \ln(n^2) \\ &= \ln\Big((n-1)(n+1)\Big) - \ln(n^2) \\ &= \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n) \\ &= \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) - \Big(\ln(n) - \ln(n-1)\Big).\end{aligned}$$

▶ Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n := \ln(n) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

▶ Comme $\frac{n}{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, on a, par continuité de ln, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

▶ Ainsi, $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge donc, d'après les résultats sur les séries télescopiques, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge donc

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ converge.}}$$

▶ Aussi, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n - u_2.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $u_2 = \ln(2)$ donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2).}$$

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite positive.

1. Est-ce que, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum_n u_n$ converge ?

2. Montrer que

$$\left.\begin{array}{l}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \sum_n u_n \text{ converge}\end{array}\right\} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction • Exercice 7.

1. ▶ Pour $n \geqslant 2$, on note $u_n := \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

▶ La série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

▷ En effet, on a, pour $x \geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_2^x \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(\ln(t)\big)\Big]_2^x = \ln\big(\ln(x)\big) - \ln\big(\ln(2)\big).$$

▷ En faisant tendre $x \to +\infty$, on a donc

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

▷ Par comparaison série-intégrale, $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

▶ En revanche, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ car

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

▶ Ainsi, $\boxed{\text{l'implication est fausse.}}$

2. ▶ On suppose que $(u_n)_n$ est décroissante et que $\sum u_n$ converge.

▶ L'objectif est de montrer que $nu_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathfrak{o}(1)$, *i.e.* $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▶ On montre d'abord que la suite $\big((2n)u_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ On a, par décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \quad u_k \geqslant u_{2n},$$

donc, en sommant,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = nu_{2n}.$$

Par positivité des termes de la suite et, en multipliant par 2, on a

$$0 \leqslant (2n)u_{2n} \leqslant 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

▷ Si l'on note $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$, on a $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n$.

▷ La série $\sum u_n$ étant supposée convergente, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, en tant que suite extraite, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ également, vers la même limite.

▷ Ainsi, $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par encadrement,

$$(2n)u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

▶ On montre que $\big((2n+1)u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ On a, par positivité et décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} &= 2nu_{2n+1} + u_{2n+1} \\ &\leqslant (2n)u_{2n} + u_{2n+1}. \end{aligned}$$

▷ Or $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car, $\sum u_n$ étant convergente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Aussi, d'après ce qui précède, $(2n)u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▷ Par encadrement, on a $\big((2n+1)u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

▶ Les suites $\big((2n)u_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((2n+1)u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant toutes deux convergentes vers 0, on a

$$nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Pour établir la convergence de $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'idée générale est majorer nu_n par une différence de deux termes de la suite des sommes partielles. Ici, on a étudié séparément les suites $\big((2n)u_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((2n+1)u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, en utilisant justement ce procédé pour la première. On aurait pu, peut-être plus astucieusement, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant nu_n \leqslant 2 \sum_{k=\lfloor n/2\rfloor+1}^{n} u_k = S_n - S_{\lfloor n/2\rfloor} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 20

Existe-t-il $x, y \notin \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$?

Correction • Exercice 20.

Méthode 1

Il est acquis que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Intéressons-nous à $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Cas 1. On suppose que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y \in \mathbb{Q}$ par hypothèse.

Cas 2. On suppose que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

Conclusion.

$$\boxed{\text{Il existe deux irrationnels } x \text{ et } y \text{ tels que } x^y \in \mathbb{Q}.}$$

Méthode 2

▶ On démontre tout d'abord que $\dfrac{\ln(p)}{\ln(q)} \notin \mathbb{Q}$ pour p et q deux entiers premiers distincts.

▷ On raisonne par l'absurde. Fixons $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{\ln(p)}{\ln(q)} = \dfrac{a}{b}$.

▷ On a alors $b\ln(p) = a\ln(q)$, d'où, $\ln(p^b) = \ln(q^a)$, donc, par passage à l'exponentielle,

$$p^b = q^a.$$

▷ Comme $b \neq 0$, c'est impossible par primalité de p et q.

▶ On s'intéresse au nombre $\sqrt{2}^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$.

Cas 1. Ou bien $\sqrt{2}^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}} \in \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y \in \mathbb{Q}$ par hypothèse.

Cas 2. Ou bien $\sqrt{2}^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}} \notin \mathbb{Q}$. On pose

$$x := \sqrt{2}^{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y := 2\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}.$$

On a alors $x^y = 2 \in \mathbb{Q}$.

▶ $\boxed{\text{Il existe deux irrationnels } x \text{ et } y \text{ tels que } x^y \in \mathbb{Q}.}$

Exercice 21

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

Correction • Exercice 21.

▶ Comme $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a, par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 pour f, on a
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x \to 0}{\mathfrak{o}}(x^2)$$
donc
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + \underset{x \to 0}{\mathfrak{o}}(x). \tag{1}$$
▶ Aussi, on a
$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \xrightarrow[x \to 0]{} f''(0)$$
donc
$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = f''(0) + \underset{x \to 0}{\mathfrak{o}}(1). \tag{2}$$
▶ On a alors, d'après (1),
$$\begin{aligned}\frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} &= \frac{1}{x}\left(f'(x) - f'(0) - \frac{f''(0)}{2}x + \underset{x \to 0}{\mathfrak{o}}(x)\right)\\ &= \frac{f'(x)-f'(0)}{x} - \frac{f''(0)}{2} + \underset{x \to 0}{\mathfrak{o}}(1),\end{aligned}$$
puis, d'après (2),
$$\begin{aligned}\frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} &= f''(0) - \frac{f''(0)}{2} + \underset{x \to 0}{\mathfrak{o}}(1)\\ &= \frac{f''(0)}{2} + \underset{x \to 0}{\mathfrak{o}}(1).\end{aligned}$$
▶ Par définition de la limite avec les développements limités, on a finalement
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2}.}$$

Correction des exercices

ALGÈBRE

Exercice 28

Soit $n \geqslant 2$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ayant n racines réelles distinctes.
Soit $a > 0$. Que dire des racines de $P^2 + a$?

Correction • Exercice 28.

LEMME. Les racines de P' sont réelles.

- Notons a_1, ..., a_n les racines de P.
- Notons $\widetilde{P} : x \mapsto P(x)$. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. On a :
  - $\widetilde{P}$ est une fonction réelle, à valeurs réelles ;
  - $\widetilde{P}$ est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$;
  - $\widetilde{P}$ est dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$;
  - $P(a_i) = P(a_{i+1})$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(\beta_i) = 0$.

- On dispose ainsi de $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ racines réelles distinctes de P'.
- Comme $\deg(P') = n - 1$, on a toutes les racines de P', qui sont donc toutes réelles.

Racines de $P^2 + a$.

- Montrons que les racines de $P^2 + a$ sont simples.
- Il suffit de vérifier que $P^2 + a$ et $(P^2 + a)'$ n'ont pas de racines communes.
- Les racines de $P^2 + a$ sont toutes complexes.
  - Soit α une racine de $P^2 + a$.
  - Comme $P^2(\alpha) + a = 0$, on a, a étant un nombre réel positif,

$$P(\alpha) = \pm \mathrm{i}\sqrt{a}.$$

  - Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a nécessairement $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Les racines de $(P^2 + a)' = 2PP'$ sont toutes réelles.
  - En effet, une racine de $2PP'$ est une racine de P ou de P' par intégrité de $\mathbb{R}[X]$.
  - Mais, par hypothèse, les racines de P sont toutes réelles.
  - Aussi, par le LEMME, les racines de P' sont toutes réelles.
  - Par produit, les racines de $2PP'$ sont toutes réelles.
- Ainsi, $P^2 + a$ et $(P^2 + a)'$ n'ont pas de racines communes.

CONCLUSION.

$$\boxed{\text{Le polynôme } P^2 + a \text{ admet } 2n \text{ racines complexes distinctes.}}$$

Exercice 30

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tels que P' divise P.

Correction • Exercice 30.

ANALYSE.

▶ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n := \deg(P) \geqslant 1$. Supposons que $P' \mid P$.

▶ Fixons $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP'$. Alors $\deg(Q) = 1$.

▶ Fixons $\lambda, a \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda(X-a)$.

▶ On a alors $P = \lambda(X-a)P'$.

▶ On applique la formule de Taylor à P en a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

▶ En dérivant l'expression ci-dessus, il vient :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda k P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

▶ En multipliant par Q, on a

$$\lambda(X-a)P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda k P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

▶ On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda k P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

▶ Par identification dans la base $\left(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\right)$,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(\lambda k - 1) = 0.$$

▶ On détermine λ à l'aide de la relation en $k = n$.
Comme $P^{(n)}(a) \neq 0$ (coefficient dominant), on a $\lambda = \dfrac{1}{n}$.

▶ On a donc

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\left(\frac{k}{n} - 1\right) = 0$$

d'où, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

▶ Ainsi, $P = \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$ d'où l'existence de $K \in \mathbb{R}^*$ tel que $P = K(X-a)^n$.

SYNTHÈSE.

▶ Soient $K \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $P := K(X-a)^n$.

▶ Alors $P' = Kn(X-a)^{n-1}$ donc $\dfrac{X-a}{n}P' = P$ d'où $P' \mid P$.

CONCLUSION.

$$\boxed{P' \mid P \iff \exists K \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* : \quad P = K(X-a)^n.}$$

Exercice 36 Noyaux et images itérés, cœur et nilespace.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \text{ et } \mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k).$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

3. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p) \text{ et } \mathrm{Im}(u^{p+k}) = \mathrm{Im}(u^p)$$

4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u^p)$ et $\mathrm{Ker}(u^p)$ s'appellent respectivement « cœur » et « nilespace » de u.

Correction • Exercice 36.

1. ▶ Soit $k \in \mathbb{N}$.

▶ Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$. Alors

$$u^{k+1}(x) = u^k\Big(\underbrace{u(x)}_{=0_E}\Big) = 0_E,$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$, d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1}).}$

▶ Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{k+1})$. Fixons $x \in E$ tel que $u^{k+1}(x) = y$. Alors

$$y = u^{k+1}(x) = u^k\Big(u(x)\Big) \in \mathrm{Im}(u^k),$$

d'où $\boxed{\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k).}$

2. ▶ Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $n_k := \dim\Big(\mathrm{Ker}(u^k)\Big)$. La suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie ne prend que des valeurs entières.

▶ D'après **1.**, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

▶ Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(u^k) \subset E$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_k \leqslant n.$$

▶ Ainsi, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans l'ensemble fini $[\![0, n]\!]$ et est croissante. La suite $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire.

▶ Fixons un rang k_0 tel que, pour $k \geqslant k_0$, $n_k = n_{k_0}$.

▶ On a, par **1.**,

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(u^{k_0}) \subset \mathrm{Ker}(u^{k_0+1}) \\ \dim\Big(\mathrm{Ker}(u^{k_0})\Big) = \dim\Big(\mathrm{Ker}(u^{k_0+1})\Big), \end{cases}$$

donc, E étant de dimension finie, $\mathrm{Ker}(u^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(u^{k_0})$.

▶ $\boxed{\text{On a bien obtenu l'existence de } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1}).}$

▶ On définit p par

$$p := \min\Big\{k \in \mathbb{N} \;\Big|\; \mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})\Big\},$$

la partie de $\mathbb{N}$ considérée étant bien non vide car contenant k_0 précédemment construit.

3. ▶ On démontre l'égalité des noyaux par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
INITIALISATION. Pour $k = 0$, il n'y a rien à démontrer.
HÉRÉDITÉ. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p)$. On a :
▷ d'après **1.**, $\mathrm{Ker}(u^{p+k}) \subset \mathrm{Ker}(u^{p+k+1})$;
▷ par stationnarité de la suite $\Big(\dim\big(\mathrm{Ker}(u^k)\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$, on a

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(u^{p+k})\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u^{p+k+1})\big).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^{p+k+1})$, d'où, par hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{Ker}(u^{p+k+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^p),$$

d'où l'hérédité.
CONCLUSION. On a bien, par récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p).}$$

▶ On démontre désormais l'égalité des images.
▷ Soit $k \in \mathbb{N}$.
▷ En appliquant le théorème du rang aux endomorphismes u^p et u^{p+k}, on a

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(u^p)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u^p)\big) = n = \dim\big(\mathrm{Ker}(u^{p+k})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u^{p+k})\big),$$

or $\mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ donc $\dim\big(\mathrm{Im}(u^p)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(u^{p+k})\big)$.
▷ Par récurrence sur **1.**, on a $\mathrm{Im}(u^{p+k}) \subset \mathrm{Im}(u^p)$.
▷ L'espace vectoriel E étant de dimension finie, on a bien obtenu l'égalité

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Im}(u^{p+k}) = \mathrm{Im}(u^p).}$$

4. ▶ D'après le théorème du rang, on a déjà

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u^p)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u^p)\big).$$

▶ Montrons que $\mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \{0_E\}$.
▷ Soit $y \in \mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p)$.
▷ Comme $y \in \mathrm{Im}(u^p)$, fixons $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$.
▷ Comme $y \in \mathrm{Ker}(u^p)$, on a

$$0 = u^p(y) = u^p\big(u^p(x)\big) = u^{2p}(x),$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{2p})$.
▷ En appliquant **3.** avec $k \leftarrow p$, on a $\mathrm{Ker}(u^{2p}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^p)$, *i.e.* $u^p(x) = 0_E$.
▷ Comme $y = u^p(x)$, on a $y = 0_E$.
▷ Finalement, on a $\mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \{0_E\}$.
▶ Par caractérisation de la somme directe en dimension finie, on a finalement

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p).}$$

Exercice 40 Matrices de rang 1.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ telles que $A = CL$.

2. Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

3. Déterminer, pour $p \in \mathbb{N}$, une expression de A^p.

Correction • Exercice 40.

1. ▶ La matrice A étant de rang 1, on a, par définition du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left\{\mathrm{C}_i(A)\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}\right) = 1.$$

▶ Fixons $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{C}_i(A) = \alpha_i C.$$

▶ La matrice A s'écrit alors par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_1 C & \alpha_2 C & \cdots & \alpha_n C \end{array} \right).$$

▶ Posons $L := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

▶ Fixons $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tels que $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

▶ On a

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 c_1 & \alpha_2 c_1 & \cdots & \alpha_n c_1 \\ \alpha_1 c_2 & \alpha_2 c_2 & \cdots & \alpha_n c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 c_n & \alpha_2 c_n & \cdots & \alpha_n c_n \end{pmatrix} = CL.$$

▶ D'où l'existence de la décomposition souhaitée.

2. **Méthode 1**

▶ On fixe C et L telles que $A = CL$ et l'on garde les notations pour les coefficients de ces matrices.

▶ On a

$$A^2 = CLCL = C\underbrace{(LC)}_{\in\mathbb{R}}L = (LC)CL = (LC)A.$$

▶ Or

$$\begin{aligned} LC &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n = \mathrm{Tr}(A). \end{aligned}$$

Méthode 2

- La matrice A étant de rang 1, on a, par le théorème du rang,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = n-1.$$

- Notons $\mathcal{B}$ une base adaptée à $\mathrm{Ker}(A)$.
- Fixons $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ tels que

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}}_{=:B} P^{-1}.$$

- On a $A^2 = PB^2P^{-1}$ or

$$B^2 = a_n B = \mathrm{Tr}(B)B.$$

- La trace étant invariante par similitude matricielle, on a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ donc

$$\begin{aligned} A^2 &= P\big(\mathrm{Tr}(A)B\big)P^{-1} \\ &= \mathrm{Tr}(A)PBP^{-1} \\ &= \mathrm{Tr}(A)A. \end{aligned}$$

3.
- Déjà, $A^0 = \mathrm{I}_n$.
- Montrons par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = \mathrm{Tr}(A)^{p-1}A.$$

Initialisation.
Pour $p=1$, on a $A = \mathrm{Tr}(A)^0 A$, d'où la propriété pour $p=1$.
Hérédité.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = \mathrm{Tr}(A)^{p-1}A$. On a

$$A^{p+1} = A^p \times A = \mathrm{Tr}(A)^{p-1}A^2,$$

or $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$ donc

$$A^{p+1} = \mathrm{Tr}(A)^{p-1}\,\mathrm{Tr}(A)A = \mathrm{Tr}(A)^p A.$$

D'où l'hérédité.
- Ainsi, on a

$$\boxed{A^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \ A^p = \mathrm{Tr}(A)^{p-1}A.}$$

Exercice 42

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice *nilpotente*.

> *La matrice N est dite* nilpotente *lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.*

Montrer que $N - \mathrm{I}_n$ est inversible et déterminer son inverse.

Correction • Exercice 42.

▶ On introduit l'indice de nilpotence de N.
 ▷ Notons $A := \left\{ p \in \mathbb{N} \;\middle|\; N^p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \right\}$.
 ▷ On a $A \subset \mathbb{N}$ et, N étant nilpotente, $A \neq \varnothing$. La partie A est donc minorée.
 ▷ Notons $p_0 := \min(A)$. L'entier p_0 est appelé « l'indice de nilpotence de N ».
 ▷ On remarque que $p_0 \geqslant 1$ car $\mathrm{I}_n \neq 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ (sauf si $n = 0$, ce qui est exclu par l'énoncé).

▶ On a

$$(\mathrm{I}_n - N) \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k = \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k - \sum_{k=0}^{p_0-1} N^{k+1},$$

soit, par changement d'indice dans la deuxième somme,

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n - N) \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k &= \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k - \sum_{k=1}^{p_0} N^k \\ &= \mathrm{I}_n + \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k - \sum_{k=1}^{p_0-1} N^k - N^{p_0},\end{aligned}$$

soit, par définition de la nilpotence,

$$(\mathrm{I}_n - N) \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k = \mathrm{I}_n.$$

L'idée de calculer cette quantité vient de la volonté de faire apparaître les puissances successives de N. Aussi, $\sum_{k=0}^{p_0-1} N^k$ est une « somme géométrique de matrices ». Ce n'est pas un hasard si l'on multiplie par $\mathrm{I}_n - N$.

▶ Par définition de l'inversibilité d'une matrice et de l'inverse d'une matrice, on a

$$\boxed{\mathrm{I}_n - N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{I}_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k.}$$

Exercice 43 Lemme de Hadamard.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

> *Une matrice* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *est dite* à diagonale strictement dominante *lorsque*
>
> $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Correction • Exercice 43.

▶ Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante.
▶ On raisonne par contraposée et l'on suppose que A n'est pas inversible.
▶ Fixons $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \underline{\mathbb{C}^n} \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$.
▶ Fixons $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|x_{i_0}| = \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|.$$

On a $|x_{i_0}| \neq 0$.
▶ On étudie la i_0-ième ligne de l'équation $AX = 0$.
▷ On a

$$\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j = -a_{i_0,i_0} x_{i_0}.$$

▷ En passant au module et en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j|.$$

▷ En divisant par $|x_{i_0}| \neq 0$ et en remarquant que pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant 1$, on a

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|.$$

▶ On a montré que

$$\exists i_0 \in [\![1, n]\!] : \quad |a_{i_0,i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$$

donc que A n'est pas à diagonale strictement dominante.
▶ $\boxed{\text{D'où l'inversibilité de } A \text{ à diagonale strictement dominante.}}$

Exercice 55 Inversibilité dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que $M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Correction • Exercice 55.

ANALYSE.

▶ Supposons que M est inversible et que $M^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.
▶ Alors M^{-1} existe et, $\det(M^{-1})$ étant polynomial en les coefficients de M^{-1}, on a $\det(M^{-1}) \in \mathbb{Z}$.
▶ On a

$$\underbrace{\det(M)}_{\in \mathbb{Z}}\underbrace{\det(M^{-1})}_{\in \mathbb{Z}} = \det(MM^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1.$$

▶ Ainsi, $\det(M)$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}$ donc $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'où

$$\left|\det(M)\right| = 1.$$

SYNTHÈSE.

▶ Supposons que $\det(M) = \pm 1$.
▶ Alors M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\mathrm{Com}(M)^{\top} = \pm \mathrm{Com}(M)^{\top}.$$

▶ La matrice $\mathrm{Com}(M)$ est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. En effet, $\mathrm{Com}(M)$ est constituée des déterminants extraits de la matrice M, elle-même à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Le déterminant étant polynomial en les coefficients de la matrice considérée, les déterminants des matrices extraites sont dans $\mathbb{Z}$.
▶ Donc $\pm \mathrm{Com}(M)^{\top} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.
▶ Ainsi, M vérifie les conditions demandées.

CONCLUSION.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La matrice } M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ est inversible et d'inverse dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \\ \text{si, et seulement si, } \det(M) = \pm 1.\end{array}}$$

Exercice 59

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & (0) \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & 2 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Correction • Exercice 59.

▶ On détermine une relation de récurrence vérifiée par la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On développe Δ_{n+2} suivant la première colonne. On a

$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2 \begin{vmatrix} 1 & & & & (0) \\ 2 & 3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

puis, en développant le second déterminant par rapport à la première ligne, on a

$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n.$$

▶ La suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Comme $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$, les solutions de l'équation caractéristique sont 1 et 2 donc, d'après les résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on a

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \Delta_n = \lambda 1^n + \mu 2^n.$$

Fixons deux tels réels λ et μ.
▶ On détermine λ et μ en résolvant le système

$$\begin{cases} 3 = \Delta_1 = \lambda + 2\mu \\ 7 = \Delta_2 = \lambda + 4\mu. \end{cases}$$

▶ On obtient $\lambda = -1$ et $\mu = 2$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n = 2^{n+1} - 1.}$$

Exercice 69 Similitudes d'un espace euclidien.

Soient $\left(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{L}(E)$.

- *On dit que* f *est une* similitude de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *lorsque*

$$\forall x \in E, \quad \left\|f(x)\right\| = \lambda \|x\|.$$

- *On dit que* f préserve l'orthogonalité *lorsque*

$$\forall x, y \in E, \quad x \perp y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \perp f(y).$$

1. Soient $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. Montrer que $x - y \perp x + y$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$f \text{ est une similitude de rapport } \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in E, \ \left\langle f(x) \middle| f(y) \right\rangle = \lambda^2 \langle x \mid y \rangle.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On suppose que f est une similitude de rapport λ.
Montrer que f préserve l'orthogonalité.

4. On suppose que f préserve l'orthogonalité.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

(a) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\left\|f(e_i)\right\| = \left\|f(e_j)\right\|$.

(b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que f est une similitude de rapport λ.

Correction • Exercice 69.

1. On a, par bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$,

$$\langle x - y \mid x + y \rangle = \langle x \mid x \rangle + \langle x \mid y \rangle - \langle y \mid x \rangle - \langle y \mid y \rangle$$

soit, par symétrie et par définition de la norme associée au produit scalaire,

$$\langle x - y \mid x + y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

d'où, les vecteurs étant unitaires,

$$\langle x - y \mid x + y \rangle = 0.$$

2. **Démonstration de $\Longrightarrow$.**

▶ On suppose que f est une similitude de rapport λ.
▶ Soient $x, y \in E$.
▶ Par la formule de polarisation,

$$\left\langle f(x) \middle| f(y) \right\rangle = \frac{\left\|f(x) + f(y)\right\| - \left\|f(x) - f(y)\right\|}{4},$$

d'où, f étant un endomorphisme,

$$\left\langle f(x) \middle| f(y) \right\rangle = \frac{\left\|f(x + y)\right\| - \left\|f(x - y)\right\|}{4},$$

d'où, f étant une similitude de rapport λ,

$$\Big\langle f(x) \,\Big|\, f(y) \Big\rangle = \frac{\lambda\|x+y\| - \lambda\|x-y\|}{4} = \lambda \frac{\|x+y\| - \|x-y\|}{4},$$

d'où, par la formule de polarisation,

$$\Big\langle f(x) \,\Big|\, f(y) \Big\rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle.$$

▶ D'où l'implication.

DÉMONSTRATION DE $\Longleftarrow$.

▶ On suppose que

$$\forall x, y \in E, \ \Big\langle f(x) \,\Big|\, f(y) \Big\rangle = \lambda^2 \langle x \mid y \rangle.$$

▶ Soit $x \in E$. On a alors

$$\Big\| f(x) \Big\|^2 = \Big\langle f(x) \,\Big|\, f(x) \Big\rangle = \lambda^2 \langle x \mid x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2.$$

▶ D'où l'implication, par passage à la racine carrée et positivité de la norme.

3. Soient $x, y \in E$ tels que $x \perp y$. On a alors

$$\Big\langle f(x) \,\Big|\, f(y) \Big\rangle = \lambda^2 \langle x \mid y \rangle = \lambda^2 \times 0.$$

D'où le résultat.

4. (a) ▶ Comme $\|e_i\| = \|e_j\| = 1$, on a, $e_i - e_j \perp e_i + e_j$.

▶ Par préservation de l'orthogonalité, on a $f(e_i - e_j) \perp f(e_i + e_j)$.

▶ Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux étant nul, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \Big\langle f(e_i - e_j) \,\Big|\, f(e_i + e_j) \Big\rangle = \Big\langle f(e_i) - f(e_j) \,\Big|\, f(e_i) + f(e_j) \Big\rangle \\ &= \Big\| f(e_i) \Big\|^2 + \Big\langle f(e_i) \,\Big|\, f(e_j) \Big\rangle - \Big\langle f(e_j) \,\Big|\, f(e_i) \Big\rangle - \Big\| f(e_j) \Big\|^2 \\ &= \Big\| f(e_i) \Big\|^2 - \Big\| f(e_j) \Big\|^2. \end{aligned}$$

▶ Par positivité de la norme, $\Big\| f(e_i) \Big\| = \Big\| f(e_j) \Big\|$.

(b) ▶ Soit $x \in E$.

▶ Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, fixons $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

▶ La base étant orthonormale, on a $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

▶ Par linéarité de f, on a $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$.

▶ Par conservation de l'orthogonalité, $\Big(f(e_i) \Big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthogonale de E donc, par le théorème de Pythagore,

$$\Big\| f(x) \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big\| x_i f(e_i) \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \Big\| f(e_i) \Big\|^2.$$

▶ Comme $\Big\| f(e_1) \Big\| = \cdots = \Big\| f(e_n) \Big\|$, on peut poser $\lambda := \Big\| f(e_1) \Big\|$. On a alors

$$\Big\| f(x) \Big\|^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \lambda^2 \|x\|.$$

▶ $\boxed{\text{Il existe donc } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } f \text{ est donc une similitude de rapport } \lambda.}$

Exercice 75

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \langle A \mid P \rangle$?

Correction • Exercice 75.

▶ On raisonne par l'absurde. Fixons $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(0) = \langle A \mid P \rangle.$$

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n := (X-1)^n$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} P_n(0) = (-1)^n \\ \|P_n\|^2 = \dfrac{1}{2n+1}. \end{cases}$$

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$1 = \left|P_n(0)\right| = \left|\langle A \mid P_n \rangle\right| \leqslant \|A\|\|P_n\| = \frac{\|A\|}{\sqrt{2n+1}}.$$

▶ En faisant tendre $n \to +\infty$, on a $1 \leqslant 0$, d'où une contradiction.
▶ Finalement,

$$\boxed{\nexists A \in \mathbb{R}[X] : \quad \forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(0) = \langle A \mid P \rangle.}$$

Exercice 80 Suites de carré sommable.

On considère
$$\ell^2 := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_n |u_n|^2 \text{ converge}\right\}.$$
On définit sur $\ell^2 \times \ell^2$ l'application suivante :
$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\left(\ell^2, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ est un espace préhilbertien réel.

2. On considère
$$F := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \geqslant p, \;\; u_n = 0\right\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2, différent de ℓ^2.

(b) Montrer que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

Correction • Exercice 80.

1. <u>**Lemme.**</u> Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$|xy| \leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} \quad \text{et} \quad |x+y|^2 \leqslant 2\Big(|x|^2 + |y|^2\Big).$$

► Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

► On a
$$0 \leqslant \Big(|x| - |y|\Big)^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2$$
donc
$$|xy| \leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2}.$$

► On a
$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
donc, d'après ce qui précède,
$$|x+y|^2 \leqslant 2\Big(|x|^2 + |y|^2\Big).$$

<u>**L'ensemble ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.**</u>

► Déjà, $\ell^2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.

► La série nulle étant convergente, on a bien $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in \ell^2$.

► Montrons que ℓ^2 est stable par combinaisons linéaires.

▷ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Montrons que $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après le LEMME,
$$0 \leqslant (\lambda u_n + v_n)^2 \leqslant 2\Big(\lambda^2 {u_n}^2 + {v_n}^2\Big) = 2\lambda^2 {u_n}^2 + 2{v_n}^2.$$

▷ Comme $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent, la série $\sum\Big(2\lambda^2 {u_n}^2 + 2{v_n}^2\Big)$ converge.

▷ Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum(\lambda u_n + v_n)^2$ converge.

On aurait pu aussi appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{N+1}$ pour majorer $S_N := \sum_{n=0}^{N}(\lambda u_n + v_n)^2$.

L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur ℓ^2.

DÉFINITION DE L' APPLICATION.

▶ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| \leqslant \dfrac{|u_n|^2 + |v_n|^2}{2}$.

▶ Comme $\sum|u_n|^2$ et $\sum|v_n|^2$ convergent, la série $\sum \dfrac{|u_n|^2 + |v_n|^2}{2}$ converge.

▶ Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n v_n|$ converge.

▶ Ainsi, $\sum u_n v_n$ converge absolument donc converge.

▶ Finalement, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est correctement définie, à valeurs réelles.

BILINÉARITÉ ET SYMÉTRIE.

▶ La symétrie provient de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.

▶ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comme ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.
On a

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle &= \left\langle (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n)w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n w_n + v_n w_n,\end{aligned}$$

or, par appartenance à ℓ^2 (ce que l'on a vérifié avec la définition de l'application), $\sum u_n w_n$ et $\sum v_n w_n$ convergent, donc

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n w_n \\ &= \lambda\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle + \left\langle (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle,\end{aligned}$$

d'où la linéarité à gauche.

▶ L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ étant symétrique et linéaire à gauche, elle est bilinéaire.

CARACTÈRE « DÉFINI POSITIF ».

▶ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

▶ On a $\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2 \geqslant 0$.

▶ Si l'on suppose que $\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = 0$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant {u_k}^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2 = 0,$$

d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

2. **(a)** ▶ Déjà, $F \subset \ell^2$. En effet, toute suite nulle à partir d'un certain rang définit une série convergente.

▶ On a $0_{\ell^2} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$.

▶ Montrons que F est stable par combinaisons linéaires.

▷ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

▷ Fixons $p_u, p_v \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \forall n \geqslant p_u, & u_n = 0 \\ \forall n \geqslant p_v, & v_n = 0. \end{cases}$$

▷ Posons $p_{\lambda u+v} := \max(p_u, p_v)$. Alors

$$\forall n \geqslant p_{\lambda u+v}, \quad \lambda u_n + v_n = 0.$$

▷ Ainsi, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

▶ La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ℓ^2 car $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge mais n'est pas dans F car aucun de ses termes n'est nul.

(b) ▶ On détermine $F^\perp$.

▷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^\perp$.

▷ On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $(y_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n^{(k)} = \delta_n^k = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k. \end{cases}$$

▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(y_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

▷ Alors on a, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^\perp$, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (y_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = 0,$$

d'où, par définition de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$,

$$u_k = 0.$$

▷ Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\ell^2}$.

▷ Réciproquement, $F^\perp$ étant un sous-espace vectoriel de ℓ^2, $0_{\ell^2} \in F^\perp$.

▷ Finalement, $F^\perp = \{0_{\ell^2}\}$.

▶ Ainsi, $(F^\perp)^\perp = \ell^2$.

▶ Mais, par **2.(a)**, $F \neq \ell^2$ donc

$$F \neq (F^\perp)^\perp.$$

On a obtenu un exemple d'espace préhilbertien de dimension infinie et de sous-espace vectoriel F tel que $F \neq (F^\perp)^\perp$. En effet, on a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$ et l'inclusion réciproque est vraie en dimension finie.

Correction des exercices

PROBABILITÉS

Exercice 84

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathscr{B}(p_n).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Correction • Exercice 84.

- Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n donne

$$\mathbb{P}\Big(\Big|S_n - \mathbb{E}[S_n]\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}[S_n]}{\varepsilon^2}. \tag{$\star$}$$

- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{E}[X_k] = p_k$ donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n}(p_1 + \cdots + p_n) = m_n.$$

- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{V}[X_k] = p_k(1-p_k)$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, on a

$$\mathbb{V}[S_n] = \frac{1}{n^2}\Big(\mathbb{V}[X_1] + \cdots + \mathbb{V}[X_n]\Big) = \frac{p_1(1-p_1) + \cdots + p_n(1-p_n)}{n^2}.$$

- En reportant dans $(\star)$, on a

$$\mathbb{P}\Big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{p_1(1-p_1) + \cdots + p_n(1-p_n)}{n^2\varepsilon^2}.$$

- Puisque pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $p_k, 1-p_k \in [0,1]$, on a $p_k(1-p_k) \leqslant 1$ donc

$$\mathbb{P}\Big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1 + \cdots + 1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

L'étude de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ donne mieux :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad p_k(1-p_k) \leqslant \frac{1}{4}.$$

- En faisant tendre $n \to +\infty$, on a, par encadrement (la probabilité étant positive),

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.}$$

Exercice 85

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Montrer que

$$\mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2].$$

Correction • Exercice 85.

X étant définie sur un espace probabilisé fini, X admet bien une espérance et une variance.

MÉTHODE 1

▶ D'après la formule de König-Huygens, on a

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

▶ Comme $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right]$, on a, par positivité de l'espérance,

$$\mathbb{V}[X] \geqslant 0.$$

▶ Ainsi, $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \geqslant 0$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2].}$$

MÉTHODE 2

▶ On note $X(\Omega) := \{x_1, \cdots, x_n\}$ et l'on pose

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad p_k := \mathbb{P}(X = x_k).$$

▶ On a alors

$$\mathbb{E}[X]^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k p_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \sqrt{p_k}\sqrt{p_k}\right)^2,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]^2 &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k \sqrt{p_k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k}^2\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2 p_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right),\end{aligned}$$

d'où, par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2]\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right),$$

d'où, comme $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$,

$$\mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2].$$

Exercice 89

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

2. **Application.**
On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $1/6$ d'au plus $1/100$.

Correction • Exercice 89.

1. ▶ Soit $\varepsilon > 0$.
▶ L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec X s'écrit
$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}[X]\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}.$$
▶ En remplaçant ε par εn et, puisque $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathbb{V}[X] = np(1-p)$, on a
$$\mathbb{P}\Big(|X - np| \geqslant \varepsilon n\Big) \leqslant \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$
▶ Comme $\Big(|X - np| \geqslant n\varepsilon\Big) = \left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$, on a
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.}$$

2. ▶ On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, en notant X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du 6 au cours des n lancers, on ait
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geqslant 0,95,$$
c'est-à-dire, par passage à l'évènement contraire,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{1}{100}\right) \leqslant 0,05.$$
On se donne un tel n et l'on garde la notation de la variable aléatoire X.
▶ La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.
On peut donc appliquer la question 1. avec $p \leftarrow \frac{1}{6}$ et $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{100}$.
▶ Il suffit alors que n vérifie
$$\frac{\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)}{n\frac{1}{100^2}} \leqslant 0,05,$$

ce qui donne

$$n \geqslant \frac{5}{36} \times 10^4 \times \frac{1}{5 \times 10^{-2}} = \frac{10^6}{36} \approx 27777,778$$

donc $\boxed{n \geqslant 27778.}$